

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 535.42; 517.9
ББК 22.311

А.В. БОРОВСКИЙ

*доктор физико-математических наук, профессор
Байкальского государственного университета экономики и права, г. Иркутск
e-mail: andrei-borovskii@mail.ru*

А.Н. БОРОДИН

*кандидат физико-математических наук, доцент
Байкальского государственного университета экономики и права, г. Иркутск
e-mail: artur_b@mail.ru*

А.Л. ГАЛКИН

*зав. сектором Института общей физики РАН им. А.М. Прохорова,
доктор физико-математических наук, г. Москва
e-mail: galkin@kapella.gpi.ru*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ TH ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Проведено численное моделирование эффектов дифракции TH волны в строгой математической постановке. Рассмотрено решение краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца, восходящей к трудам А. Зоммерфельда, Ф. Франка и М. Борна. Представлены расчеты дифракции плоской электромагнитной TH волны, падающей под произвольным углом на металлическую идеально проводящую полуплоскость. Определены угловые и радиальные распределения действительной и мнимой частей строгого решения уравнения Гельмгольца. Вычислен вектор Пойнтинга для электромагнитной волны. Определены угловые и радиальные распределения для интенсивности излучения. Рассмотрены отличия эффектов дифракции TH и TE волн.

Ключевые слова: дифракция; математическое моделирование задачи дифракции; краевая задача для уравнения Гельмгольца.

A. V. BOROVSKY

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk
e-mail: andrei-borovskii@mail.ru*

A. N. BORODIN

*PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk
e-mail: artur_b@mail.ru*

A. L. GALKIN

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chair of the Sector,
General Physics Institute of RAS named after A.M. Prochorov, Moscow
e-mail: galkin@kapella.gpi.ru*

NUMERICAL SIMULATION OF TM -WAVE DIFFRACTION ON PERFECTLY CONDUCTING HALF-PLANE

The article presents numerical simulation of TM -wave diffraction phenomenon in strict mathematical statement. The solution of boundary-value diffraction problem for Helmholtz equation, which traces its roots to the works of A. Sommerfeld, F. Frank and M. Born, is studied. The article contains the calculations of flat electromagnetic TM -wave that falls on any angle on a metal ideally conducting half-plane. The authors determine angular and radial distributions of the real and imaginary parts of the rigorous solution of the Helmholtz equation, calculate the Poynting vector for electromagnetic wave, determine angular and radial distributions for radiation intensity and examine the differences of the diffraction effects of TM and TE waves.

Keywords: diffraction; mathematical simulation of diffraction task; boundary-value problem for Helmholtz equation.

К фундаментальным задачам современной оптики относится задача дифракции плоской волны на идеально проводящем (металлическом) клине. Предельным случаем клина является идеально проводящая полуплоскость. Подобные задачи возникают при разработке оптических устройств, предназначенных для передачи и обработки изображений. Их качество зависит от успешного подавления оптических помех, возникающих из-за рассеяния (дифракции) света на краях диафрагм и фильтрующих элементов [3].

Решение строгих задач дифракции должно быть основано на применении уравнения Гельмгольца (стационарное волновое уравнение). Его исследование восходит к трудам А. Зоммерфельда [7]. Впоследствии задачами строгой теории дифракции занимались Ф. Франк и Р. Мизес [11], М. Борн и Э. Вольф [1], значительный вклад внес Г. Гринберг [6], раздел, посвященный дифракции на клине, имеется в книге Л. Ландау и Е. Лифшица [9]. Теорией уравнения Гельмгольца занимались Дж. Грин [12], Дж. Кирхгоф [13], А. Самарский и А. Тихонов [10], В. Владимиров [5]. Некоторые методы решения уравнения Гельмгольца рассмотрены в [8].

В данной статье продолжим математическое моделирование задачи Зоммерфельда — дифракции на металлической идеально проводящей полуплоскости (рис. 1), начатое в [2; 3].

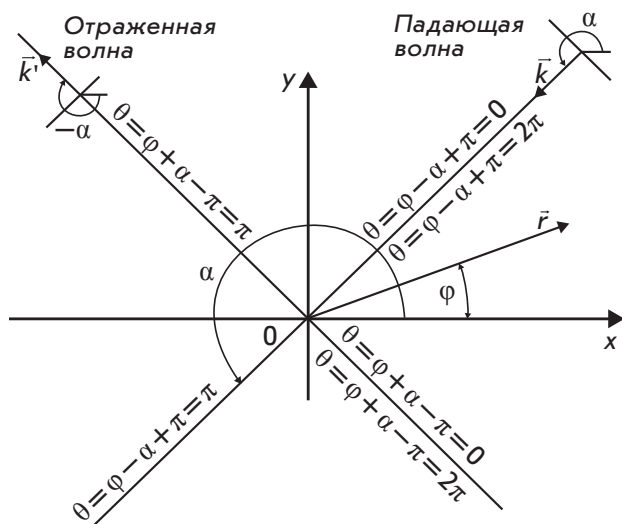


Рис. 1. Углы в задаче дифракции плоской волны с волновым вектором k на полуплоскости Ox : k' — волновым вектор отраженной волны геометрической оптики; φ — угол наблюдения

Из бесконечности на металлическую идеально проводящую полуплоскость под углом к ней падает плоская электромагнитная волна. Радиус-вектор точки наблюдения имеет полярные координаты r, φ . Волновой вектор падающей волны обладает полярными координатами k, α . Угол γ , который волновой вектор падающей волны составляет с полуплоскостью (угол Зоммерфельда), равен $\gamma = \alpha - \pi$. В задаче для углов $0 < \varphi < \pi - \gamma$ имеется падающая и отраженная волны геометрической оптики, для углов $\pi - \gamma < \varphi < \pi + \gamma$ имеется только падающая (она же прошедшая волна) и для углов $\pi + \gamma < \varphi < 2\pi$ имеет место геометрическая тень. Кроме того, на волны геометрической оптики во всех диапазонах углов накладывается дифрагировавшее (или рассеянное) излучение.

Как показали М. Борн и Э. Вольф [1, с. 517], двумерная задача, в которой решение зависит от двух координат r, φ , распадается на линейную суперпозицию двух скалярных задач для волн TE и TH поляризации. Дифракция волны TE поляризации, для которой вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения волны, изучена авторами в работе [3].

Рассмотрим дифракцию для волны TH поляризации

$$TH \rightarrow \begin{cases} (E_x, E_y, 0) \\ (0, 0, H_z) \end{cases}$$

Данная волна содержит три компоненты поля. Из них компонента магнитного поля H_z параллельна краю полуплоскости. Компоненты электрического поля E_x, E_y перпендикулярны краю полуплоскости, причем компонента E_x параллельна полуплоскости, а компонента E_y перпендикулярна ей.

Для поля H_z возникает скалярная задача комплексной функции

$$H_z(r) = U(r).$$

Граничные условия для TH волны

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_r = 0.$$

Важной физической характеристикой задачи дифракции является интенсивность излучения, усредненная по времени. Вычислим ее для TH волны. Будем исходить из известного выражения для усредненной по времени плотности потока энергии (вектора Пойнтинга) [1, с. 51].

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (1)$$

Далее коэффициент $c/8\pi$ опустим.

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} следующим образом выражаются через решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} H_z &= U; \\ E_x &= \cos\varphi E_r - \sin\varphi E_\varphi; \\ E_y &= \sin\varphi E_r + \cos\varphi E_\varphi; \\ E_r &= -\frac{1}{i\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{i\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi &= -i \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i \frac{\partial U}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

здесь $\rho = \frac{2\pi}{\lambda} r = kr$.

Вычисление векторного произведения (1) приводит к выражению

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{e}_x \operatorname{Re}(E_y H_z^*) - \mathbf{e}_y \operatorname{Re}(E_x H_z^*).$$

Найдем $E_y H_z^*$ и $E_x H_z^*$, определяя поля через решение уравнения Гельмгольца U :

$$\begin{aligned} E_y H_z^* &= (\sin\varphi E_r + \cos\varphi E_\varphi) U^* = \\ &= \sin\varphi \left(-\frac{1}{i\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^* + \cos\varphi \left(-i \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) U^* = \\ &= i \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} U^* - i \cos\varphi \frac{\partial U}{\partial \rho} U^*; \\ E_x H_z^* &= (\cos\varphi E_r - \sin\varphi E_\varphi) U^* = \\ &= \cos\varphi \left(-\frac{1}{i\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) U^* - \sin\varphi \left(-i \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) U^* = \\ &= i \frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} U^* + i \sin\varphi \frac{\partial U}{\partial \rho} U^*. \end{aligned}$$

Вектор Пойтинга принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{e}_x \operatorname{Re} \left(i \left[\frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} U^* - \cos\varphi \frac{\partial U}{\partial \rho} U^* \right] \right) + \\ &+ \mathbf{e}_y \operatorname{Re} \left(-i \left[\frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} U^* + \sin\varphi \frac{\partial U}{\partial \rho} U^* \right] \right). \end{aligned}$$

Взятие реальной части приводит к выражению

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_x \left(-\frac{\sin\varphi}{\rho} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \cos\varphi \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right] \Big) + \\ &+ \mathbf{e}_y \left(\frac{\cos\varphi}{\rho} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right] + \right. \\ &+ \sin\varphi \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right] \Big). \end{aligned}$$

Интенсивность пропорциональна модулю вектора \mathbf{S} . Для нее получим

$$I = |\mathbf{S}| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right]^2}.$$

Как видим, выражение для интенсивности TH волны совпадает с выражением для интенсивности TE волны, приведенным в [3].

Строгое решение задачи дифракции плоской TH волны на идеально проводящей полуплоскости имеет вид

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) + U_2^C(\rho, \varphi + \gamma), \quad (2)$$

здесь

$$U_2^C(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \exp(i\rho \cos\theta) + \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \cos^{\frac{\theta}{2}} \sqrt{2\rho} \quad (3)$$

дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда, а γ — угол Зоммерфельда. Как показано в [3], данный вид дифракционного интеграла удобен для проведения численного моделирования.

Вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \theta) &= \\ &= -\cos\theta \cdot \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \theta) + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}; \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \theta) &= \\ &= \cos\theta \cdot \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \theta) - \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \theta) &= \\ &= \rho \sin\theta \cdot \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \theta) - \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\theta}{2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \theta) = -\rho \sin \theta \cdot \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \theta) + \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\theta}{2}.$$

Для определения интенсивности *ТН* волны необходимо найти $\operatorname{Re} U(\rho, \varphi, \gamma)$ и $\operatorname{Im} U(\rho, \varphi, \gamma)$, а также их производные для функции (2) с дифракционным интегралом (3). Опуская подробности аналитических вычислений, выпишем результирующие формулы:

$$\operatorname{Re} U(\rho, \varphi, \gamma) = \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) + \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma);$$

$$\operatorname{Im} U(\rho, \varphi, \gamma) = \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) + \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re} U(\rho, \varphi, \gamma) = & -\cos(\varphi - \gamma) \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) - \\ & -\cos(\varphi + \gamma) \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Im} U(\rho, \varphi, \gamma) = & \cos(\varphi - \gamma) \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) + \\ & + \cos(\varphi + \gamma) \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma) - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} U(\rho, \varphi, \gamma) = & \rho \sin(\varphi - \gamma) \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) + \\ & + \rho \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{Im} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma) - \\ & - \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} U(\rho, \varphi, \gamma) = & -\rho \sin(\varphi - \gamma) \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) - \\ & - \rho \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \varphi + \gamma) + \\ & + \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Из выражений для производных

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} U(\rho, \varphi, \gamma), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} U(\rho, \varphi, \gamma)$$

следует, что

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0; 2\pi} = 0. \quad (4)$$

В самом деле, первые два слагаемых обращаются в нуль в силу четности дифракционного интеграла и его симметрии относительно половины периода, а третье слагаемое равно нулю из-за наличия множителя $\sin \varphi / 2$. Условие (4) обеспечивает обращение в нуль производной по нормали к полуплоскости

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right|_r = \frac{k}{\rho} \left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0; 2\pi} = 0.$$

Для проведения расчетов привлекались программные пакеты объектного программирования «MathCad» и «Математика».

Рассмотрим нормальное падение на полуплоскость плоской волны. Здесь угол Зоммерфельда $\gamma = \pi/2$.

На рис. 2 представлены угловые распределения интенсивности в диапазоне углов $0 < \varphi < 2\pi$ — для $\rho = 50$; $\gamma = \pi/2$ — для *ТН* и *ТЕ* волн. На рис. 3 показаны угловые распределения интенсивности для $\rho = 30$, $\gamma = \pi/3$.

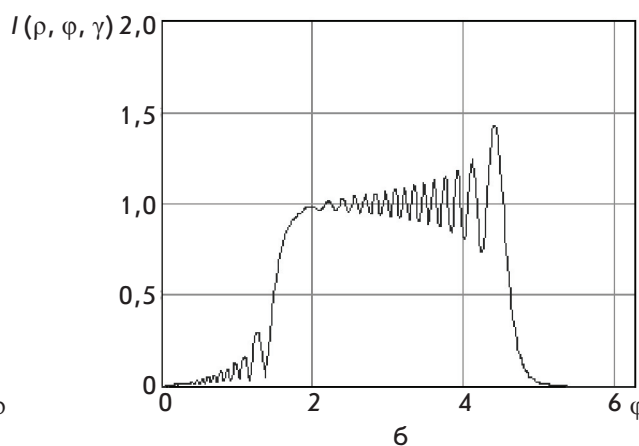
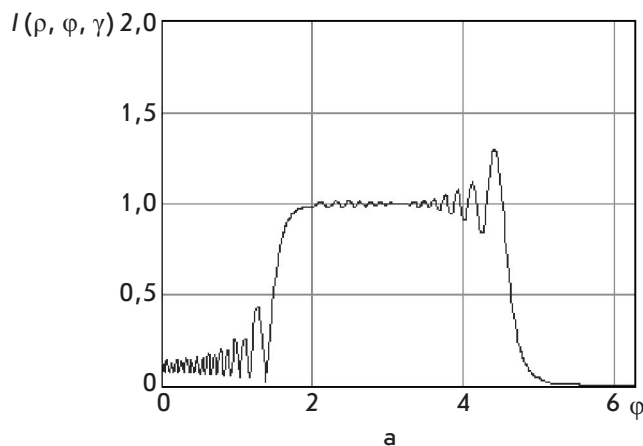


Рис. 2. Угловые распределения интенсивности *ТН* (а) и *ТЕ* (б) волн для значений $\rho = 50$, $\gamma = \pi/2$

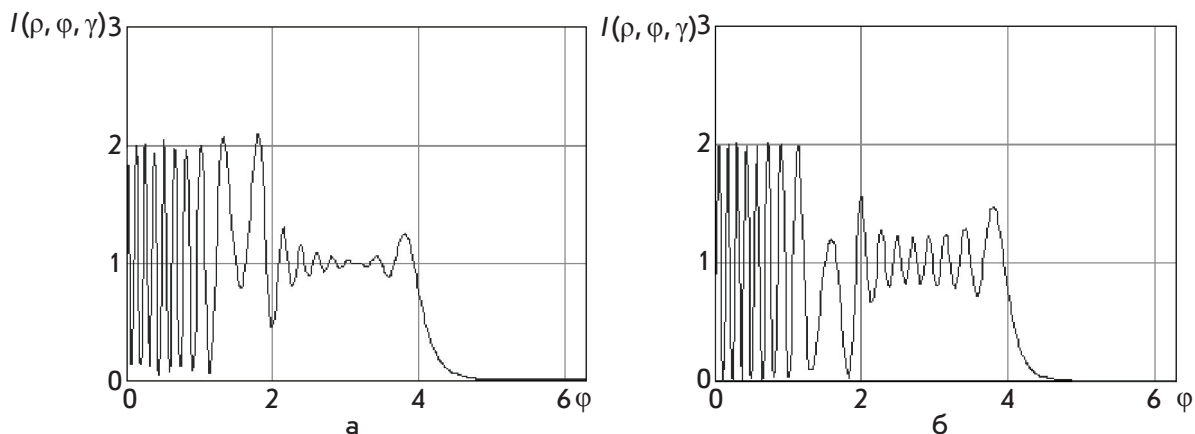


Рис. 3. Угловые распределения интенсивности TH (а) и TE (б) волн для значений $\rho = 30$, $\gamma = \pi/3$

На рис. 4 представлено поведение интенсивности вблизи полуплоскости для случая $\rho = 30$, $\gamma = \pi/3$. На рис. 5 показано радиальное распределение интенсивности на верхней и нижней поверхностях полуплоскости для случая $\gamma = \pi/3$ для TH волн.

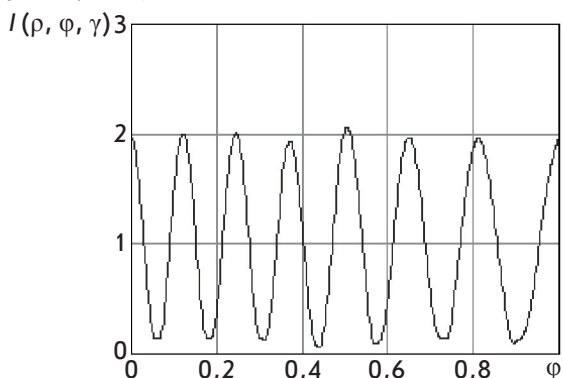


Рис. 4. Поведение интенсивности TH волны вблизи верхней грани полуплоскости для случая $\rho = 30$, $\gamma = \pi/3$

Дифракция TH волны в ближней зоне отличается от дифракции TE волны. Интенсивность TH волны на верхней поверхности отлична от нуля и колеблется вокруг значения, равного двум. При увеличении радиуса интенсивность стремится к двум. Точка $\rho = 0$ является особой. Вблизи нее интенсивность стремится к бесконечности. В качестве примера (рис. 6) представлен график зависимости усредненной по углу интенсивности TH волны от радиуса в логарифмическом масштабе (точки) и ее аппроксимация линейной функцией методом наименьших квадратов для случая $\gamma = \pi/2$. Наклон аппроксимационной прямой равен $-0,48$. Таким образом, особенность интенсивности $\langle I \rangle \approx \rho^{-1/2}$ является интегрируемой. Для стационарной задачи интенсивность пропорциональна объемной плотности энергии электромагнитного поля, т.е. интеграл от интенсивности по объему остается конечной

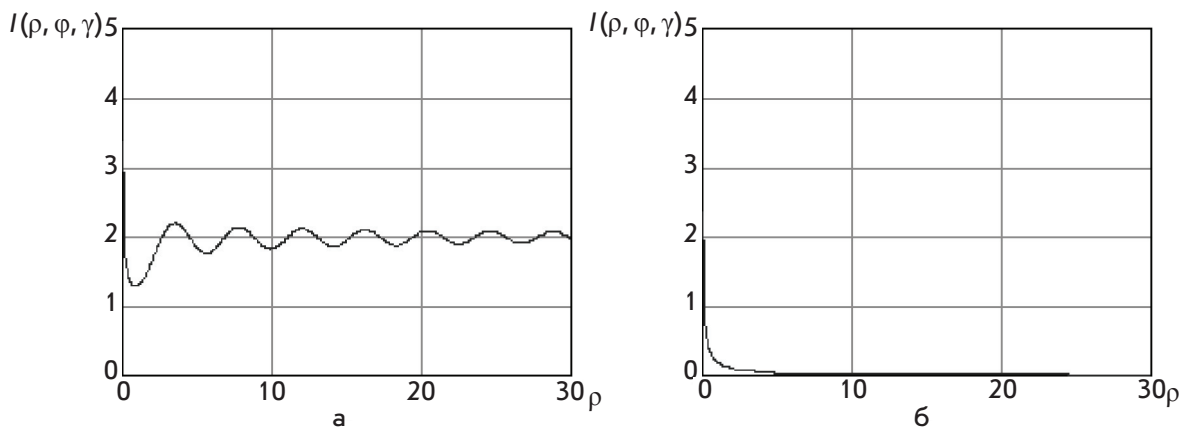


Рис. 5. Радиальное распределение интенсивности TH волны на верхней (а) и нижней (б) поверхностях полуплоскости для случая $\gamma = \pi/3$

величиной. В дальней зоне отличия нивелируются. Картины дифракции волн обоих типов начинают походить друг на друга.

Другой отличительной особенностью дифракции TN волны является меньшее значение параметра s . Это означает, что TN волна менее подвержена дифракции по сравнению с TE волной. Такой вывод следует из расчетов, представленных на рис. 2–3.

Таким образом, в настоящей статье проведены численные расчеты дифракции TN волны на идеально проводящей полуплоскости. Проведено сравнение эффектов дифракции для TN и TE волн.

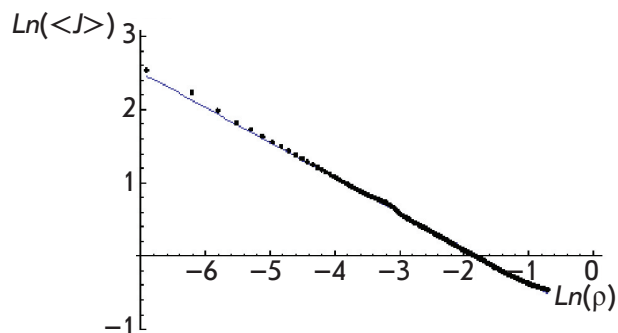


Рис. 6. Зависимость усредненной по углу интенсивности TN волны от радиуса в логарифмическом масштабе (точки) и ее аппроксимация прямой для случая $\gamma = \pi/2$

Список использованной литературы

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.
2. Боровский А.В., Бородин А.Н. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда. Иркутск, 2012.
3. Боровский А.В., Бородин А.Н., Галкин А.Л. Численное моделирование эффектов дифракции // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) (электронный журнал). 2012. № 4. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>. (Identifikats. nomer stat'i v NTTs «Informregistr» 0421200101\0178).
4. Бородин А.Н., Малов А.Н., Чупраков С.А. Измерение светорассеяния в зависимости от радиуса кривизны края апертурной диафрагмы // Компьютерная оптика. 2005. Вып. 28. С. 87–88.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1982.
6. Гринберг Г.А., Пименов Ю.В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах // ЖТФ. 1957. Т. 27. Вып. 10. С. 2826.
7. Зоммерфельд А. Оптика. М., 1953.
8. Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г. Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник заданий: учеб. пособие по курсу «Высшая математика». М., 2010.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. М., 1982. Т. 8: Электродинамика сплошных сред.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.
11. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.; Л., 1937.
12. Green G. Mathematical papers of the late. London, 1871.
13. Kirchhoff G. Ann.d.physik. 1883. No 18. P. 663.

Referenses

1. Born M., Vol'f E. Osnovy optiki. M., 1973.
2. Borovskii A.V., Borodin A.N. Difraktsionnyi integral Franka-Zommerfel'da. Irkutsk, 2012.
3. Borovskii A.V., Borodin A.N., Galkin A.L. Chislennoe modelirovanie effektiv difraktsii // Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii (Baikal'skii gosudarstvennyi universitet ekonomiki i prava) (elektronnyi zhurnal). 2012. № 4. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>. (Identifikats. nomer stat'i v NTTs «Informregistr» 0421200101\0178).
4. Borodin A.N., Malov A.N., Chuprakov S.A. Izmerenie svetorasseyaniya v zavisimosti ot radiusa krivizny kraya aperturnoi diafragmy // Komp'yuternaya optika. 2005. Vyp. 28. S. 87–88.
5. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M., 1982.
6. Grinberg G.A., Pimenov Yu.V. K voprosu o difraktsii elektromagnitnykh voln na beskonechno tonkikh ideal'no provodyashchikh ekranakh // ZhTF. 1957. T. 27. Vyp. 10. S. 2826.
7. Zommerfel'd A. Optika. M., 1953.
8. Krupin V.G., Pavlov A.L., Popov L.G. Vysshaya matematika. Uravneniya matematicheskoi fiziki. Sbornik zadaniy: ucheb. posobie po kursu «Vysshaya matematika». M., 2010.
9. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika: v 10 t. M., 1982. T. 8: Elektrodinamika sploshnykh sred.
10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M., 1972.
11. Frank F., Mizes R. Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoi fiziki. M.; L., 1937.
12. Green G. Mathematical papers of the late. London, 1871.
13. Kirchhoff G. Ann.d.physik. 1883. No 18. P. 663.